

Raciocínio proporcional no ensino superior: o papel da tecnologia na construção de conceitos por estudantes de pedagogia

Proportional reasoning in higher education: the role of technology in concept construction by pedagogy students

Razonamiento proporcional en la educación superior: el papel de la tecnología en la construcción de conceptos por estudiantes de pedagogía

Simone Leite Andrade¹

Resumo

Este artigo discute a formação de conceitos escolares, com foco na proporcionalidade, e o uso de tecnologias digitais como recursos de mediação nos processos de aprendizagem. A pesquisa, fundamentada em teorias de construção do conhecimento, descreve uma intervenção didática desenvolvida com estudantes de Pedagogia no ensino superior. O objetivo foi analisar indícios de compreensão do conceito de proporcionalidade produzidos por estudantes durante uma sequência didática apoiada por recursos tecnológicos. A metodologia envolveu três intervenções com situações-problema voltadas à investigação dos conhecimentos prévios dos participantes, à diferenciação entre proporcionalidade e não proporcionalidade e à aplicação dos conceitos estudados. O software GeoGebra foi usado para construção e análise das representações gráficas das relações entre as grandezas. Os resultados sugerem que a exploração da natureza multiplicativa das relações proporcionais e o uso de representações gráficas podem favorecer a compreensão de aspectos definidores do conceito de proporcionalidade, especialmente aqueles relacionados às ideias de covariação e invariância. Além disso, a visualização gráfica mostrou-se um recurso relevante para a distinção entre situações proporcionais e não proporcionais, evidenciando o potencial das tecnologias digitais, articuladas à mediação pedagógica, na exploração do raciocínio proporcional.

Palavras-chave: Proporcionalidade; Raciocínio proporcional; Ensino superior; Tecnologia educacional; GeoGebra.

Abstract

This article discusses the formation of school concepts, focusing on proportionality and the use of digital technologies as mediating resources in learning processes. Grounded in theories of knowledge construction, the study describes a didactic intervention developed with undergraduate Pedagogy students. The objective was to analyze evidence of students' understanding of the concept of proportionality during a technology-supported instructional sequence. The methodology involved three interventions based on problem-solving situations aimed at investigating participants' prior knowledge, distinguishing proportional and non-proportional relationships, and applying the concepts studied. The GeoGebra software was used to construct and analyze graphical representations of relationships between quantities.

¹ Centro Universitário de Adamantina – FAI. Adamantina/SP, Brasil. E-mail: simone@fai.com.br
Orcid: <https://orcid.org/0000-0001-9216-0703>

The results suggest that exploring the multiplicative nature of proportional relationships and using graphical representations may support the understanding of defining aspects of proportionality, particularly those related to the ideas of covariation and invariance. Furthermore, graphical visualization proved to be a relevant resource for distinguishing proportional from non-proportional situations, highlighting the potential of digital technologies, articulated with pedagogical mediation, in the development of proportional reasoning.

Keywords: Proportionality; Proportional reasoning; Higher education; Educational technology; Geogebra.

Resumen

Este artículo aborda la formación de conceptos escolares, con énfasis en la proporcionalidad y en el uso de tecnologías digitales como recursos de mediación en los procesos de aprendizaje. La investigación, fundamentada en teorías de construcción del conocimiento, describe una intervención didáctica desarrollada con estudiantes de Pedagogía en la educación superior. El objetivo fue analizar indicios de comprensión del concepto de proporcionalidad producidos por los estudiantes durante una secuencia didáctica apoyada por recursos tecnológicos. La metodología incluyó tres intervenciones basadas en situaciones-problema orientadas a investigar los conocimientos previos de los participantes, diferenciar proporcionalidad y no proporcionalidad, y aplicar los conceptos estudiados. El software GeoGebra fue utilizado para la construcción y el análisis de representaciones gráficas de las relaciones entre magnitudes. Los resultados sugieren que la exploración de la naturaleza multiplicativa de las relaciones proporcionales y el uso de representaciones gráficas pueden favorecer la comprensión de aspectos definitorios del concepto de proporcionalidad, especialmente aquellos relacionados con las ideas de covariación e invariancia. Además, la visualización gráfica se mostró como un recurso relevante para distinguir situaciones proporcionales y no proporcionales, evidenciando el potencial de las tecnologías digitales, articuladas con la mediación pedagógica, en la exploración del razonamiento proporcional.

Palabras clave: Proporcionalidad; Razonamiento proporcional; Educación superior; Tecnología educativa; GeoGebra.

Introdução

O presente texto tem como propósito apresentar questões relevantes quanto à natureza da formação dos conceitos escolares de um modo geral e, mais particularmente, do conceito de proporcionalidade, e o uso das tecnologias digitais como recursos de mediação pedagógica na exploração de conceitos matemáticos, tendo em vista algumas concepções teóricas sobre o assunto e uma intervenção realizada com estudantes do ensino superior.

Pensar a formação de um conceito pressupõe construir uma representação mental sobre generalizações que permitem aos indivíduos reduzir consideravelmente a complexidade do ambiente, o que se faz fundamental para a formação dos sujeitos que constituem a sociedade (Lomônaco et al., 2001, p. 161). No entanto, a ideia de conceito como instrumento para a descontextualização da realidade imediata apresenta importantes mudanças evolutivas, muito além da simples transição da sensação para o pensamento, que diferencia homens de animais (Oliveira, 1999, p. 56).

Sendo a construção de conceitos de origem social, que se faz a partir das interações e mediações culturais que se iniciam na infância e evoluem através do processo formativo, ao longo da adolescência e início da juventude, é influenciada diretamente pelos meios através dos quais a operação é realizada. Isso significa que a qualidade das mediações pode favorecer a ampliação do pensamento e a formação do conceito. Por este motivo o papel da educação escolar torna-se fundamental e a proposição de situações didáticas que possam viabilizar o aprimoramento das relações sociais e o desenvolvimento das funções intelectuais assume papel relevante para esse processo de construção (Moraes, 2017, p. 53). Adicionalmente, discutir sobre a formação de conceitos no âmbito dos cursos de licenciatura é uma questão de extrema importância, pois, além de favorecer o processo formativo destes enquanto estudantes, articulando suas funções mentais, também propõe o repensar sobre a prática profissional dentro do seu campo de estudo e em outros campos da educação, enquanto futuros docentes e formadores de gerações (Moraes, 2017, p. 51).

Partindo das indagações relacionadas à formação de conceitos no contexto escolar, da necessidade de ampliar as discussões sobre esse processo nos cursos de formação de professores e considerando que o conceito de proporcionalidade é frequentemente associado ao desenvolvimento do pensamento teórico e à compreensão de relações matemáticas presentes em diferentes áreas do conhecimento, optou-se pela realização de uma intervenção envolvendo esse tema com estudantes do curso de Pedagogia de um Centro Universitário do interior do Estado de São Paulo. Em geral, na cultura escolar, da educação básica ao ensino superior, quando se propõe a exploração da noção de proporcionalidade, enfatiza-se mais os aspectos característicos ou sintáticos, valorizando apenas um conjunto de regras para operar

com as ideias matemáticas relacionadas ao conceito, ao invés de valorizar os significados destas ideias (aspectos definidores) (Miguel, 2020, p. 505).

Investigou-se, com base em referenciais teóricos e na análise das atividades desenvolvidas durante a intervenção, os indícios de compreensão do conceito de proporcionalidade produzidos por estudantes de Pedagogia ao participarem de uma sequência didática centrada na exploração dos aspectos definidores do conceito e apoiada por recursos tecnológicos. Nessa perspectiva, o potencial educativo das tecnologias digitais não reside apenas nos recursos de representação que oferecem, mas também nas possibilidades de interação, problematização e mediação pedagógica que podem favorecer processos de formação conceitual pelos estudantes (Valente, 2005, p. 44).

Fundamentação teórica

Segundo Valente (1999), a apropriação do conhecimento pode se estruturar sob duas vertentes distintas: por meio da retenção mecânica e linear da informação ou por meio do processamento ativo da informação mediado pelos esquemas mentais do sujeito, configurando-se como uma efetiva construção do conhecimento. Sob a perspectiva da Epistemologia Genética piagetiana (Piaget, 1973, p. 15), essa construção pressupõe que o aprendizado não ocorre por mera transmissão, mas pela reorganização ativa das estruturas cognitivas (esquemas) quando o sujeito é desafiado a agir sobre o objeto de conhecimento. O saber construído, portanto, integra-se às estruturas existentes do indivíduo por processos de assimilação e acomodação, capacitando-o a mobilizar tais estruturas para a resolução de situações-problema inéditas e para a incorporação crítica de novos dados conceituais. Desse modo, o ato de aprender se caracteriza pelo enriquecimento e flexibilização das estruturas mentais, seja pela ampliação de novos saberes, seja pela autorregulação e reestruturação dos esquemas precedentes. Nesse panorama, os recursos tecnológicos emergem como ferramentas potencialmente integradas a esses mecanismos de equilíbrio cognitiva, desde que intencionalmente explorados como catalisadores de reflexão e depuração de hipóteses pelo estudante.

Distanciando-se de uma visão puramente instrumental que reduz a tecnologia a um mero facilitador pragmático das atividades cotidianas, Valente (1999) pondera que sua

inserção no ambiente educacional suscita complexidades que transcendem a simplificação de processos. O impacto das tecnologias na educação está intrinsicamente atrelado às reconfigurações estruturais que elas provocam na sociedade contemporânea (Coll; Monereo, 2010, p. 15).

As Tecnologias da Informação e Comunicação (TIC), concebidas para codificar, representar e transmitir informações, assumem especial relevância nesse contexto. Isso ocorre porque podem atuar como instrumentos semióticos e de mediação psicológica, capazes de redefinir as maneiras de pensar, aprender, conceber e formalizar o conhecimento por meio de sistemas simbólicos partilhados. Dada a evolução acelerada desses ecossistemas digitais e suas profundas implicações socioculturais, impõe-se a necessidade de analisar criticamente a natureza das transformações decorrentes de um uso excessivo e sem intencionalidade pedagógica no espaço escolar. Conforme alertam Coll e Monereo (2010), o fluxo vertiginoso de estímulos aliado à fragmentação das fontes de dados pode induzir à dispersão da atenção dos estudantes, tensionando os processos de abstração e reflexão profunda necessários à atividade matemática.

No cenário da aprendizagem ubíqua — em que o ato educativo deixa de se limitar ao espaço físico da sala de aula —, o uso de tecnologias móveis tende a ampliar as possibilidades de participação do estudante em seu próprio processo formativo. Entretanto, essa ampliação não garante, por si só, uma aprendizagem mais efetiva.

A autonomia proporcionada por esses contextos exige o desenvolvimento da autorregulação cognitiva, de modo que o acesso ampliado à informação favoreça posturas investigativas e reflexivas, e não apenas a dispersão da atenção. Sob essa ótica, considerando que o processo de aprendizagem implica a busca e a recuperação ativa de saberes a partir da interação com o meio, a apropriação do conhecimento consolida-se como um movimento essencialmente interativo, o qual é significativamente intensificado pelas redes digitais (Santaella, 2014, p. 18).

Esse cenário tem motivado reflexões acerca da necessidade de ressignificar a escola, o ensino e as estratégias pedagógicas. A aprendizagem onipresente intensifica e pulveriza o aprendizado, mas o aproveitamento desta aprendizagem e o desenvolvimento das estratégias ativas de apropriação eficaz deste conhecimento configuram-se como tarefas essenciais da

escola. Nesse contexto, torna-se importante que o professor compreenda quais técnicas pedagógicas, recursos e ferramentas podem ser utilizadas para a construção do saber por parte do aluno (Coll; Monereo, 2010; Santaella, 2014). Portanto, a discussão sobre tecnologias digitais na educação não se restringe ao domínio dos recursos disponíveis, mas envolve a compreensão de como esses instrumentos podem ser integrados às atividades curriculares e às estratégias de mediação pedagógica desenvolvidas pelo professor.

As instituições de ensino se beneficiam ao estarem conscientes de como as tecnologias digitais estão alterando os processos de ensino e de aprendizagem, visto que o computador pode ser um interessante recurso para promover ou facilitar o processo de construção do conhecimento. Porém, embora possam criar oportunidades de construção do conhecimento, a análise dos diferentes usos do computador na educação sugere que alguns usos são menos efetivos que outros. “O computador pode ajudar o processo de conceituação e o desenvolvimento de habilidades importantes para a sobrevivência na sociedade do conhecimento se é usado como um dispositivo para ser programado” (Valente, 2005, p. 105).

O processo de produção do conhecimento com o uso do computador deve se basear na interação do aprendiz com a máquina. Alguns recursos oferecem características que favorecem a compreensão, como é o caso da atividade de programar o computador através de uma linguagem de programação, que permite identificar as diversas ações executadas pelo aluno e são de extrema importância na aquisição de novos conhecimentos. A ideia mais adequada para explicitar as atividades que o aprendiz realiza na interação com as tecnologias digitais e ajudar a entender como esta interação contribui com o processo mental de construção do conhecimento foi apresentada por Valente (2005, p. 51) através da espiral da aprendizagem, que envolve um ciclo de ações de descrição-execução-reflexão-depuração-novadescrição que o aluno realiza e através da qual transforma seu pensamento.

O desenvolvimento de um programa se inicia com uma ideia de como resolver o problema. Essa ideia é passada para o computador na forma de uma sequência de comandos (...) essa ação implica na **descrição** da solução do problema usando comandos(...). O computador, por sua vez, promove a **execução** desses comandos, produzindo um resultado. O aluno, baseado no resultado obtido pode realizar a ação de **reflexão** sobre o que ele obteve e o que intencionava, acarretando diversos níveis de abstração (...) Essa reflexão pode acarretar uma das seguintes ações alternativas: ou o aluno não modifica o programa porque as suas ideias iniciais sobre a resolução daquele problema correspondem aos resultados apresentados pelo computador e,

portanto, o problema está resolvido; ou **depura** o programa quando o resultado é diferente da sua intenção original. A **depuração** pode ser em termos de alguma convenção da linguagem de programação, sobre um conceito envolvido no problema em questão, ou ainda sobre estratégias sobre como usar o conceito ou sobre como explorar os recursos tecnológicos. A depuração implica uma **nova descrição** e, assim, sucessivamente, ou seja, descrição-execução-reflexão-depuração-novadescrição (Valente, 2016, p. 871, grifo nosso).

De certo que as ações que mais contribuem para o processo de construção do conhecimento são a reflexão e a depuração. Os diferentes tipos de softwares apresentam mais ou menos recursos para facilitar o desenvolvimento destas ações e, portanto, podem ser mais ou menos efetivos no processo de construção do conhecimento. Em alguns casos o aprendiz não tem oportunidade de expressar ou descrever suas ideias, consequentemente não ocorre a execução das mesmas e nem a reflexão sobre o resultado obtido, tão pouco a depuração. Deste modo, o uso do computador para auxiliar o estudante apenas a realizar as tarefas, sem compreender o que está fazendo, é uma simples informatização do processo pedagógico. Nessa perspectiva, a construção do conhecimento é compreendida como resultado de um processo realizado pelo aprendiz através de propostas nas quais o computador se torna um recurso, uma fonte de informação para a resolução de problemas significativos. O professor tem papel potencialmente relevante neste processo, independente da escolha do recurso, pois ele será o responsável por desafiar, propor o desequilíbrio, criar as situações necessárias para que o aprendiz de fato melhore e depure suas ideias e ações em busca do conhecimento (Valente, 1999, p. 98).

Sob a perspectiva histórico-cultural, as tecnologias digitais podem ser compreendidas como instrumentos de mediação que ampliam as possibilidades de interação dos estudantes com os objetos de conhecimento, com seus pares e com o professor. Contudo, sua contribuição para a formação de conceitos não decorre das características técnicas das ferramentas em si, mas das práticas pedagógicas e das interações sociais que se organizam em torno de seu uso (Coll; Monereo, 2010; Valente, 1999).

Um conceito é “uma informação ordenada sobre as propriedades de uma ou mais coisas – objetos, evento ou processos – que torna qualquer coisa ou classe de coisas capaz de ser diferenciada de, ou relacionada com outras coisas ou classe de coisas” (Klausmeier;

Goodwin, 1977, p. 312). São os agentes fundamentais do trabalho intelectual, considerados como consequência da experiência sensorial e representam um laço vital entre impulsos externos e comportamentos expressos (Kagan, 1966, p. 97 apud Klausmeier; Goodwin, 1977, p. 312). Logo, a aprendizagem de conceitos enquanto objetivo educacional é muito importante para o desenvolvimento cognitivo dos indivíduos em todos os níveis escolares.

Todos os indivíduos em desenvolvimento formam conceitos de acordo com suas experiências de aprendizagem e utilizam estes conceitos na construção do seu pensamento sobre o mundo físico e social, tendo no significado das palavras os conceitos socialmente aceitos, ou seja, padronizados pela sociedade. Pode-se dizer, portanto, que o que um sujeito pensa sobre uma determinada palavra é a sua construção mental do conceito e a definição desta palavra no dicionário representa o conceito socialmente aceito. Os conceitos, em grande parte correspondentes ao significado das palavras que fazem parte do vocabulário do indivíduo, o levam a refletir sobre a realidade imediata, proporcionando importantes mudanças evolutivas, que diferenciam os seres humanos dos animais (Oliveira, 1999, p. 56). Davidov (1988, p. 102 apud Oliveira, 1999, p. 57) defende esta mesma ideia de generalização, abstração e formação de conceitos como característica do pensamento humano, enfatizando que o movimento da percepção para o conceito estabelece a transição do concreto, sensorial, para o abstrato, imaginável, e salienta a importância da escola neste movimento de transição.

Lomônaco (2013, p. 51) apresenta quatro principais concepções teóricas que, ao longo do século XX, foram propostas para explicar o processo de formação de conceitos: a concepção clássica, a concepção prototípica, a concepção dos exemplares e a concepção teórica. De maneira muito sucinta pode-se dizer que enquanto a visão clássica pressupõe que a abstração dos atributos comuns existentes nos membros de uma categoria forma uma representação da classe denominada conceito, a visão prototípica, ao contrário, pressupõe que o conceito se forma através da categorização pela criação de protótipos provenientes da abstração dos atributos característicos ou mais frequentes entre os membros de uma categoria, negando a existência de atributos definidores. A visão dos exemplares, assim como a prototípica, acredita que itens são incluídos ou excluídos em categorias em função da similaridade – neste caso representada através de exemplos individuais previamente armazenados. Frente às limitações que estas três visões apresentavam no que tange ao fato de

que a coesão conceitual baseia-se no fator similaridade, que é demasiadamente amplo, a visão teórica traz a concepção de que os conceitos são partes de uma rede de relações da qual deriva seu significado, estabelecidas pelo senso comum.

Em suma, o conhecimento que as pessoas têm do mundo, quer aquele adquirido através da educação formal (e que, frequentemente, implica na aprendizagem de teorias científicas), quer aquele adquirido de maneira informal e acidental (e que, frequentemente difere, em maior ou menor grau, do conhecimento científico) é considerado como a teoria do sujeito a respeito de aspectos do seu mundo (Lomônaco et al., 2001, p. 162).

Através de experimentos o psicólogo norte-americano Frank C. Keil (1989, apud Lomônaco, 2013, p. 54) analisou como se desenvolve a representação de determinados conceitos. A partir dos seus estudos demonstrou que o desenvolvimento conceitual ocorre como uma mudança de ênfase das propriedades características (não necessárias, mas comumente associadas à maioria dos exemplos de um conceito) para as definidoras (necessárias e suficientes para definir um conceito), de acordo com o decorrer da idade mas não ao mesmo tempo para diferentes conceitos.

De acordo com a teoria vygotskyana, um aspecto relevante à formação de conceitos diz respeito aos processos cotidianos, à experiência pessoal da criança - que constituem os conceitos cotidianos ou espontâneos - e à instrução formal, à aprendizagem em sala de aula – que constituem os conceitos científicos. Para Vygotsky (1991, apud Nébias, 1999, p. 135) os conceitos científicos constituem o meio no qual a consciência reflexiva se desenvolve e a aprendizagem escolar exerce papel importante em sua aquisição. No entanto, é necessário que o conceito espontâneo tenha alcançado um certo nível para que o conceito científico correspondente seja internalizado.

Os estudantes chegam à escola trazendo conhecimentos espontâneos construídos em suas experiências cotidianas. Muitas vezes, esses conhecimentos diferem ou entram em tensão com os conhecimentos científicos trabalhados no contexto escolar. Nesse sentido, cabe ao professor criar condições para que os estudantes não rejeitem esses conhecimentos, não encontrem dificuldades excessivas para assimilá-los e não produzam apenas respostas formalmente corretas para cumprir tarefas escolares sem significado (Nébias, 1999, p. 138). Para isto Klausmeier; Goodwin (1977, p. 330) afirmam que os futuros professores, enquanto

na universidade, devem aprender os principais conceitos em seu campo de estudo e em outros campos da educação de um modo geral não apenas em um nível superficial. Somente haverá efetividade, portanto, na construção dos conceitos quando coincidirem o motivo e o objetivo. É importante que os professores considerem a significação dos conceitos e suas implicações para o processo de ensino, e isso remete a formação docente, inicial ou continuada, que em geral pouco aborda o processo da apropriação dos conceitos como um processo dinâmico, significativo e que sofre a influência dos fatores histórico-culturais na sua construção. “Um conceito é aquilo que a palavra que o designa quer dizer, mas ele é carregado de significações que nem sempre ela, a palavra, consegue evidenciar” (Miguel, 2020, p. 514).

Shulman (1986, p. 9) também colabora na reflexão quanto à importância e complexidade do entendimento do professor sobre o objeto de estudo e a transmissão deste conhecimento. Ele destaca a importância de três categorias de conhecimento: conhecimento do conteúdo do objeto de estudo, conhecimento pedagógico do objeto de estudo e conhecimento curricular. Apenas o conhecimento do conteúdo é possivelmente tão insuficiente quanto a falta do conhecimento pedagógico para a abordagem adequada do objeto de estudo. Combinar apropriadamente estes aspectos, no entanto, vai além de conhecer os fatos e conceitos do objeto de estudo, incluindo suas estruturas substantivas e sintáticas. Enquanto as estruturas substantivas definem os vários modos que os conceitos estão organizados a sintática implica no modo como se institui o conjunto de regras que determina o que é legítimo no conceito, garantindo o que é válido ou não. Um professor não deve ser capaz apenas de definir para seus alunos as verdades sobre um conceito, mas também explicar porque uma afirmação particular é garantida e como ela se relaciona com outras afirmações.

Portanto, para que as práticas pedagógicas docentes propiciem a adequada formação dos conceitos científicos, faz-se necessário levar em consideração uma ampla gama de fatores, que vão desde a exploração das ideias que os estudantes trazem subjacentes aos seus conceitos cotidianos, o estímulo ao diálogo e às soluções alternativas para os problemas, às ideias de inclusão para reconhecer as características necessárias ou suficientes para a definição de um conceito, até as reconceitualizações imprescindíveis para a abstração e generalização dos conceitos para além da sala de aula (Nébias, 1999, p. 139).

Trazendo esta discussão para a compreensão das abordagens que podem favorecer a formação de conceitos matemáticos, Teixeira (2004, s.p.) destaca que os conceitos matemáticos dependem das articulações que o pensamento faz entre as ações que realizamos – eles não são extraídos da experiência cotidiana com os objetos concretos e/ou as situações que ela envolve. “Diferentemente das relações contingentes que realizamos para interpretar situações cotidianas, o pensamento matemático se baseia em relações necessárias que independem do espaço e do tempo” (Teixeira, 2004, s.p.). Formam-se por dedução e não por indução, através de abstrações que permitem captar as regularidades e generalizá-las – o que torna-se um processo complexo porque envolve reconhecer os limites das generalizações. A aprendizagem dos conceitos matemáticos, além de basear-se na estruturação hierárquica dos conceitos, ainda depende de simbolização própria, ou seja, de uma “segunda linguagem”, que não é a natural, e por isso exige uma interpretação que é lenta e complexa.

No que tange à cultura da matemática escolar, Miguel (2020, p. 506) ressalta que, por fazer uso de forma inadequada da abordagem racionalista do modelo formal euclidiano como método de ensino – “o qual compreende que uma definição ou conceito é a expressão de suas relações com algo conhecido, mas que nem tudo pode ser definido porque isso implicaria em conhecer, a priori, todas as demais coisas” (Miguel, 2020, p. 505) - se apoia excessivamente e de maneira precoce na difusão de símbolos e procedimentos algorítmicos, distanciando-se de abordagens que privilegiem as construções conceituais.

Ensinar Matemática parece ser uma tarefa cada vez mais complexa que exige do professor um conhecimento aprofundado do currículo e a capacidade de se adaptar à constante mudança que caracteriza a sociedade do conhecimento. Faz-se necessário que a consciência da complexidade que envolve a formação dos conceitos científicos matemáticos seja um elemento incorporado à formação dos futuros docentes. “A formação do professor será sempre insuficiente se ela se limitar a algumas regras didáticas gerais, sem clareza dos principais obstáculos que cada um dos conceitos apresenta, para os quais o professor deve desenvolver metodologias específicas” (Teixeira, 2004, s.p.).

Entre os conceitos matemáticos que merecem destaque, o desenvolvimento da noção de proporcionalidade, presente na educação básica e pouco frequente no ensino superior, em especial nos cursos de formação de professores para os anos iniciais do ensino fundamental, é

essencial não só para a consolidação do pensamento matemático, como também de todo pensamento científico, além de permear diversas situações cotidianas. Silvestre; Ponte (2009 apud Silvestre; Ponte, 2012, p. 75) consideram três aspectos principais que caracterizam o raciocínio proporcional: (i) capacidade para distinguir situações que apresentam relações de proporcionalidade direta daquelas que não o têm; (ii) compreensão quanto à natureza multiplicativa das relações proporcionais; e (iii) capacidade para resolver diversos tipos de problema revelando flexibilidade para diferentes abordagens sem ser afetado pelo contexto, dados, estrutura numérica, grandezas ou representações. No entanto, de acordo com diversos autores (Ruiz; Carvalho, 1990; Menduni-Bortoloti; Barbosa, 2017; Miguel, 2020), no contexto da matemática escolar bem como na formação inicial de professores e na maioria dos materiais didáticos, ao se abordar o conceito de proporcionalidade, prioriza-se de forma exaustiva o ensino do algoritmo da regra de três, focado nas definições de razão como uma fração e proporção uma igualdade de razões. “Usualmente, os alunos aprendem, primeiro, a resolver problemas usando igualdades entre razões e, depois, recorrendo à função linear, sem que se estabeleça qualquer relação entre essas duas representações” (Silvestre; Ponte, 2012, p. 76).

Embora seja um conteúdo presente nos currículos de matemática da educação básica, o conceito de proporcionalidade raramente é usado de forma correta pelos estudantes do ensino fundamental (Ruiz; Carvalho, 1990) e nem todas as pessoas adultas resolvem problemas envolvendo relações de proporcionalidade direta, através do uso de raciocínio proporcional. Possivelmente, a não compreensão da natureza multiplicativa que envolve a relação de proporcionalidade traduz-se nesta dificuldade em distinguir situações que envolvem proporcionalidade das situações em que não acontece (Silvestre; Ponte, 2012, p. 75). O que define o conceito de proporcionalidade é a capacidade de analisar relações entre grandezas e compreender que há uma relação constante entre elas (invariância) e, ao mesmo tempo, a noção de que ambas variam em conjunto (covariação), isto é, há algo que muda (quantidades absolutas) mas, ao mesmo tempo, há algo que se mantém constante (na mesma proporção). Ou seja, o desenvolvimento do conceito de proporcionalidade implica muito mais do que o uso da expressão $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ na resolução de problemas (Ponte et al., 2010, p. 4).

Metodologia

Trata-se de uma pesquisa qualitativa de caráter exploratório, desenvolvida na forma de intervenção pedagógica. Os dados analisados foram produzidos a partir dos registros escritos dos estudantes, observações realizadas durante as atividades e resultados obtidos nas tarefas propostas ao longo da sequência didática.

A investigação foi desenvolvida com uma turma de 14 estudantes regularmente matriculados na disciplina Matemática na Educação, do curso de Pedagogia de um Centro Universitário do interior do Estado de São Paulo. Por se tratar de futuros professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental, considerou-se pertinente investigar suas compreensões acerca do conceito de proporcionalidade, conteúdo presente nos currículos da educação básica. As abordagens ocorreram ao longo de três encontros em semanas distintas. Para o desdobramento da sequência didática foram propostas 3 intervenções, que serão denominadas por Intervenção 1, Intervenção 2 e Intervenção 3, para facilitar a descrição. Embora o conceito de proporcionalidade direta possa ser apresentado como uma igualdade entre duas razões, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ou como uma função linear dada por $y = mx$, com $m \neq 0$, o aspecto abordado foi a noção intuitiva da proporcionalidade como função linear, explorando-se a ideia de raciocínio proporcional como precedente da noção de igualdade entre razões.

Com o objetivo inicial de investigar as considerações prévias dos alunos quanto à relação de interdependência entre grandezas e a noção de variabilidade, na Intervenção 1 foram apresentadas três situações nas quais deveriam aferir conclusões acerca da relação entre os dados constatando que nem sempre o maior valor absoluto implica em maior eficiência ou capacidade, pois depende de como se relaciona com outros dados relevantes do contexto. Na sequência foram convidados a preencher duas tabelas de dados observando a relação entre as grandezas, que deveria ser sempre a mesma. Os dados nas tabelas foram dispostos de forma aleatória para que os estudantes não se prendessem ao mecanicismo algorítmico, utilizando o raciocínio aditivo, embora ele também seja importante, uma vez que na relação de proporcionalidade direta além da razão constante tem-se também a soma e a diferença constantes (Figura 1).

Figura 1 - Intervenção 1: Atividades que exploravam as ideias quanto a relação de interdependência entre grandezas e a noção de variabilidade

Raciocínio Proporcional

01. A tabela a seguir mostra, aleatoriamente, em determinados momentos, o número de gols e o número de partidas dos quatro times mais populares de um campeonato de futebol que está acontecendo com 16 times:

TIME	A	B	C	D
Gols	25	24	18	21
Partidas	10	8	9	6

A) Qual time tem o maior número de gols? E qual tem o menor?

B) Qual time jogou até o momento o maior número de partidas? Qual jogou menos?

C) Se você tivesse que escolher o melhor desse 4 times, apenas com dados da tabela, qual você escolheria?

02. Olívia e Maria Rita deram festas de aniversário. A festa de Olívia tinha 60 pessoas dançando num salão retangular medindo 4 m de largura por 5 m de comprimento. A festa de Maria Rita tinha 72 pessoas dançando num salão quadrado de 6 m por 6 m.

A) Em qual festa havia o maior número de pessoas?

B) Em qual festa o salão reservado para dançar era maior?

C) Em qual das festas as pessoas ficaram mais “apertadas” para dançar?

03. Três Centros de Saúde estão na campanha de vacinação contra sarampo:

O Centro A, que tem maior quantidade de funcionários, está com 504 crianças inscritas e já vacinou 126.

O Centro B, que tem uma quantidade média de funcionários, já vacinou 95 das 475 crianças inscritas.

O Centro C, que tem o menor número de funcionários, está com 236 crianças inscritas e já vacinou 118.

Pergunta-se: Como verificar qual dos centros está atendendo seus clientes com maior eficiência?

04. Complete as tabelas de tal forma que a relação entre as grandezas A e B seja sempre a mesma:

A)

A	4		16	20			60		180
B		3			10	12	15	25	

B)

A	1	10		36	50			
B	0,1		4			7	10	25

Fonte: autoria própria

Após a discussão dos resultados, a proposta inicial da Intervenção 2 buscava a reflexão acerca dos aspectos definidores do conceito de proporcionalidade direta. Foram apresentadas quatro novas situações para que os alunos pudessem diferenciar o que era proporcional do que não era proporcional (Figura 2).

Figura 2 – Intervenção 2: Atividade para diferenciação entre características relevantes às situações de proporcionalidade e não proporcionalidade.

01. Lucas vende pacotes de bala nas ruas. Ele montou uma tabela para indicar o preço a ser pago, conforme o número de pacotes adquiridos. <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr> <th>Pacotes</th> <th>1</th> <th>2</th> <th>3</th> <th>5</th> <th>7</th> <th>10</th> <th>15</th> <th>20</th> <th>25</th> <th>40</th> </tr> <tr> <th>Preço (R\$)</th> <td>1,40</td> <td>2,80</td> <td>4,20</td> <td>7,00</td> <td>9,80</td> <td>14,00</td> <td>21,00</td> <td>28,00</td> <td>35,00</td> <td>56,00</td> </tr> </table> A) Qual o preço de 4 pacotes? E de 39? B) Quantos pacotes eu posso comprar com R\$ 65,80? E com R\$ 41,40? C) O que acontece com o preço quando dobramos o número de pacotes? D) Se triplicarmos o número de pacotes, o preço também triplica? E) Se chamarmos de n o número de pacotes de bala e P o preço pago por eles, qual a expressão matemática que relaciona P e n?	Pacotes	1	2	3	5	7	10	15	20	25	40	Preço (R\$)	1,40	2,80	4,20	7,00	9,80	14,00	21,00	28,00	35,00	56,00	02. A tabela abaixo relaciona o preço (em R\$) pago pelo litro de água: <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr> <th>Litros de Água</th> <th>1</th> <th>2</th> <th>x</th> <th>9</th> <th>?</th> <th>3</th> <th>8</th> <th>?</th> <th>13</th> <th>w</th> </tr> <tr> <th>Preço em R\$</th> <td>2</td> <td>?</td> <td>14</td> <td>y</td> <td>12</td> <td>6</td> <td>16</td> <td>28</td> <td>?</td> <td>19</td> </tr> </table> Complete os dados omitidos nesta tabela. Com base nos dados observados na tabela, responda: a) O que acontece com o preço quando dobramos o número de garrafas? b) O que acontece com o preço quando triplicamos o número de garrafas? c) Se triplicarmos o dinheiro que temos para comprar água, o que acontece com o número de garrafas que podem ser adquiridas? d) Se reduzirmos à quarta parte o dinheiro que temos para comprar água, o que acontece com a quantidade de garrafas a serem adquiridas? e) Se multiplicarmos por 10 o dinheiro a ser investido na compra de água, o que acontecerá com a quantidade de garrafas que podem ser adquiridas?	Litros de Água	1	2	x	9	?	3	8	?	13	w	Preço em R\$	2	?	14	y	12	6	16	28	?	19
Pacotes	1	2	3	5	7	10	15	20	25	40																																			
Preço (R\$)	1,40	2,80	4,20	7,00	9,80	14,00	21,00	28,00	35,00	56,00																																			
Litros de Água	1	2	x	9	?	3	8	?	13	w																																			
Preço em R\$	2	?	14	y	12	6	16	28	?	19																																			
03. Imagine o seguinte plano de celular pós-pago: o cliente paga uma taxa fixa de R\$ 38,00 por mês mais R\$ 0,30 por minuto utilizado (em ligações). A tabela abaixo ilustra o valor da conta mensal de acordo com os minutos utilizados: <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr> <th>Minutos utilizados</th> <th>100</th> <th>200</th> <th>300</th> <th>500</th> <th>700</th> <th>1000</th> <th>1500</th> <th>2000</th> <th>2500</th> <th>4000</th> </tr> <tr> <th>Valor da conta (R\$)</th> <td>68</td> <td>98</td> <td>128</td> <td>188</td> <td>248</td> <td>338</td> <td>488</td> <td>638</td> <td>788</td> <td>1238</td> </tr> </table> a) Qual o valor da conta a ser paga se o cliente utilizar 150 minutos em ligações? E se utilizar 400 minutos? b) Quantos minutos o cliente poderá utilizar em ligações se tiver disponível R\$ 200,00 para gastar com a conta do celular? c) O que acontece com o preço da conta se dobrarmos o número de minutos de ligação utilizados? d) Se tivéssemos disponível o dobro de dinheiro para gastar com a conta telefônica, o que aconteceria com os minutos?	Minutos utilizados	100	200	300	500	700	1000	1500	2000	2500	4000	Valor da conta (R\$)	68	98	128	188	248	338	488	638	788	1238	04. Um ciclista, partindo do marco zero de uma estrada, aciona o cronômetro e parte em direção à sua extremidade oposta. Durante a viagem ele anota o tempo t e a sua posição s fornecida pelos marcos quilométricos nos quais se encontra. Os dados são registrados no quadro a seguir: <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr> <th>t(h)</th> <th>0</th> <th>0,5</th> <th>1</th> <th>1,5</th> <th>2</th> <th>2,5</th> <th>3</th> <th>3,5</th> </tr> <tr> <th>s(km)</th> <td>0</td> <td>4</td> <td>8</td> <td>12</td> <td>16</td> <td>20</td> <td>24</td> <td>28</td> </tr> </table> a) Se o ciclista mantivesse o tempo todo o mesmo ritmo, quanto tempo depois de sua partida ele passaria pelo marco de 32 km? E pelo marco de 48 km? b) Com o mesmo ritmo, 4h30min após sua partida em que marco quilométrico o ciclista estaria passando? E 6h depois? c) Quantos quilômetros este ciclista anda em média durante uma hora? d) Qual seria a posição desse ciclista 2h15min após sua partida? E 3h45min depois? e) Em qual instante ele estaria passando pelo marco 10km? E pelo marco 50km? f) Analisando os dados, ao se dobrar a distância o tempo também dobra? E se triplicarmos o tempo a distância percorrida também triplica?	t(h)	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	s(km)	0	4	8	12	16	20	24	28				
Minutos utilizados	100	200	300	500	700	1000	1500	2000	2500	4000																																			
Valor da conta (R\$)	68	98	128	188	248	338	488	638	788	1238																																			
t(h)	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5																																					
s(km)	0	4	8	12	16	20	24	28																																					

Fonte: autoria própria

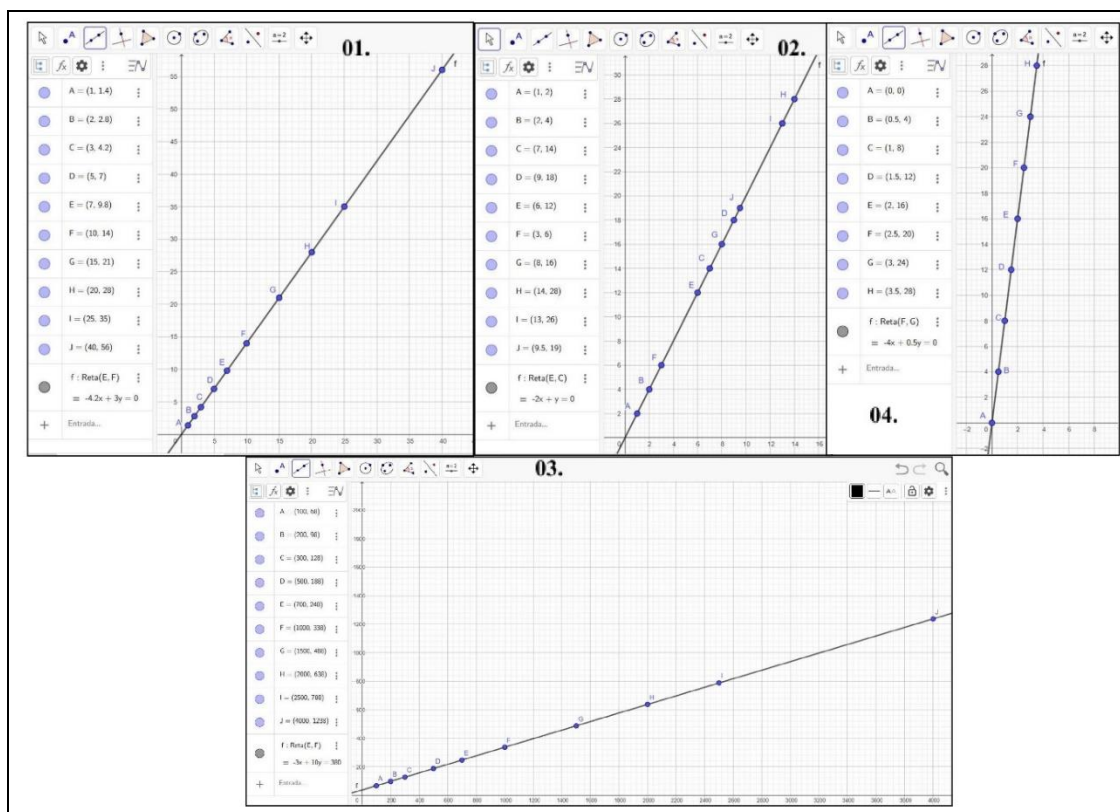
Novamente as situações propunham a identificação da relação de proporcionalidade direta a partir da construção de tabelas nas quais os dados eram dispostos de forma aleatória e a generalização, a partir da observação das características relevantes e que definem o conceito, estava relacionada à questionamentos fundados na exploração do raciocínio multiplicativo com vistas à assimilação e a apropriação do significado para além da simples manipulação de algoritmos.

A não compreensão da natureza multiplicativa da relação de proporcionalidade direta, em particular no sentido da covariação e invariância, traduz-se na dificuldade em distinguir situações que envolvem esta relação de situações em que isso não acontece (Silvestre; Ponte, 2012, p. 54).

Até esse momento da sequência didática, os recursos computacionais haviam sido utilizados principalmente como suporte para a realização e organização das atividades propostas. Em uma segunda etapa da Intervenção 2, buscou-se ampliar as possibilidades de

exploração das relações entre as grandezas por meio do GeoGebra. Para isso, os estudantes representaram em um sistema cartesiano os dados das tabelas construídas nas atividades anteriores (Figura 3), utilizando o software como ferramenta de representação e investigação matemática.

Figura 3 – Intervenção 2: Representação gráfica dos dados das atividades no GeoGebra



Fonte: autoria própria

Para isto, antes de iniciarem a atividade, fizeram a exploração dos recursos e comandos básicos do software. O objetivo era permitir que os alunos pudessem explorar o conceito, descobrindo relações de semelhança entre os casos de proporcionalidade e distinguindo-os dos casos de não proporcionalidade. O GeoGebra é um software de matemática dinâmica gratuito e multiplataforma cuja potencialidade permite explorar conceitos e situações, descobrir relações, modelar fenômenos e testar conjecturas, favorecendo o desenvolvimento de atividades investigativas (Barros; Stivam, 2012). Sua escolha para esta intervenção fundamentou-se especialmente em seu potencial para articular

diferentes formas de representação matemática, possibilitando a exploração visual das relações entre as grandezas e favorecendo discussões acerca das regularidades observadas pelos estudantes.

Finalizadas as discussões e de posse dos conceitos apreendidos, iniciaram-se as análises de situações de generalização e aplicação dos conceitos a partir da identificação e compreensão das técnicas algorítmicas com as quais conviveram ao longo de toda a educação básica, buscando a compreensão do desenvolvimento teórico para além do que se construiu empiricamente (Figura 4).

Figura 4 – Intervenção 2: Atividades de Aplicação do Conceito de Proporcionalidade Direta

Aplicando a noção de proporcionalidade direta

1. Raquel e Ricardo são donos de uma loja e desejam repartir o lucro de R\$ 1.800,00, auferido em determinado dia. Cada um deles se dedicou à loja, nesse dia, por tempos diferentes. Raquel trabalhou 7 horas nesse dia e Ricardo, por 5 horas. Supondo que eles resolvam dividir o lucro em partes diferentes, Raquel poderia receber uma quantia maior porque se dedicou à loja por mais tempo. Quanto cada um dos irmãos deverá receber se a divisão do lucro for diretamente proporcional ao tempo que cada um se dedicou à loja? 2. Antônio, Everaldo e Carlos são três amigos que abriram um pequeno negócio com venda de produtos naturais. Apesar dos três se dedicarem o mesmo número de horas por dia a este trabalho, eles não dividem os lucros em partes iguais, pois os capitais com que entraram na sociedade são diferentes. Antônio empregou	R\$ 250,00; Everaldo, R\$ 500,00 e Carlos R\$ 750,00. Se o lucro de uma semana foi de R\$ 3.000,00, quanto cada um deve receber, se o lucro foi dividido proporcionalmente aos capitais? 3. Repartir o prêmio de R\$ 2.520,00 em partes diretamente proporcionais a 3, 5 e 7, que correspondem aos gols marcados em um campeonato. 4. Um filantropo destina R\$ 350 000,00 para serem doados a dois hospitais, A e B. A razão entre a quantia recebida por A e a recebida por B é igual a 4 : 3. Quanto recebeu cada hospital? 5. A razão entre homens e mulheres, moradores de uma cidade, é de 2 para 3. Se na cidade moram 12.240 mulheres, quantos são os homens que moram na cidade?
--	---

Fonte: autoria própria

A Intervenção 3 configurou-se como uma atividade de verificação da aprendizagem. Na primeira parte desta atividade os alunos responderam a um questionário discursivo, com oito questões, no qual deveriam distinguir situações de proporcionalidade direta que eram apresentadas a partir de tabelas bem como solucionar problemas que envolviam grandezas diretamente proporcionais (Figura 5).

Figura 5 - Atividade de Verificação de Aprendizagem – Parte 1

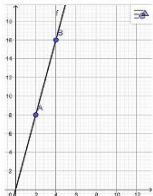
Avaliando a aprendizagem

01. A tabela abaixo representa as distâncias percorridas por um automóvel e o consumo correspondente a cada distância

Distância Percorrida (d)	15	30	45	60	75
Consumo de gasolina (c)	2	4	6	8	10

a) Qual a distância que esse automóvel pode percorrer com 1 litro de gasolina? E com 3 litros?
 b) Para percorrer uma distância de 90 km são necessários quantos litros de gasolina? E para 37,5 km?
 c) De acordo com essa situação matemática, se dobrarmos o número de litros a distância que poderá ser percorrida também dobra? E se triplicarmos a quantidade de litros?
 d) Se precisarmos percorrer uma distância que é o dobro da outra, o número de litros dobrará?
 e) É possível estabelecer uma regra que relaciona distância (d) e consumo (c)?

02. O gráfico abaixo representa a variação da quantidade Q de peças produzidas por uma máquina num certo período de tempo t



a) Complete o quadro:

t(h)	2	3	4	5	10
Q	8	16	28		48

b) Escreva uma relação entre Q e t.

03. As tabelas abaixo representam variações de duas grandezas. Peça-se, em cada uma delas:

a) Complete as tabelas, analisando o comportamento das grandezas, e classificando-as em diretamente proporcionais ou não proporcionais.
 b) Escreva uma relação entre as grandezas, se houver.
 c) Construa um gráfico cartesiano correspondente a cada uma das tabelas.

I)

A	1	2	3	4	5	6
B	2	3		8		12

II)

F	1	2	3	4	5	6
t	3	5	7	9		

III)

X	1	2	3		7	
Y	1,5		4,5	7,5		18

IV)

X	2	4	6	3		
Y	3	7	11		19	9

04. Complete os quadros abaixo, sabendo que x e y são diretamente proporcionais:

a)

X	2	4	6	10
Y	6			

b)

X		12	24	
Y	8		32	48

c)

X	1/2		1/8	2
Y	20	10		

d)

X	4,5			0,9
Y	60	36	72	

05. Três amigas, Ligia, Nara e Paula, são sócias de uma floricultura. No final do mês passado, resolveram repartir o lucro de R\$ 13.860,00 proporcionalmente ao tempo que cada uma se dedicou à loja. Ligia trabalhou das 9h às 13h, Nara das 11h às 14h e Paula das 14h às 19h. Quanto recebeu cada uma?

06. Repartir a gratificação de R\$ 720,00 em partes diretamente proporcionais a 2, 3 e 4, que correspondem às idades das crianças.

07. Um filantropo destina R\$ 350.000,00 para serem doados a dois hospitais, A e B. A razão entre a quantia recebida por A e a recebida por B é igual a 4 : 3. Quanto recebeu cada hospital?

08. Numa escola há meninas e meninos num total de 300 pessoas. A razão do número de meninas para o de meninos é 8 : 7. Qual o número de meninos?

Fonte: autoria própria

Na segunda parte identificaram as situações de proporcionalidade e não proporcionalidade analisando gráficos e tabelas em um teste de múltipla escolha no aplicativo *kahoot*, que é uma plataforma de aprendizado baseada em jogos, usada como tecnologia educacional (Figura 6).

Figura 6 - Atividade de Verificação de Aprendizagem – Parte 2



Testando o Raciocínio Proporcional

Atenção ao que caracteriza as relações diretamente proporcional, inversamente proporcional e não proporcional!

Atividades

Testando o Raciocínio Proporcional

Kahoot pronto

Perguntas (10)

Diretamente Proporcional, Inversamente Proporcional ou Não Proporcional?



☒ Diretamente Proporcional
☐ Inversamente Proporcional
☐ Não Proporcional
☐ Não sei

Diretamente Proporcional, Inversamente Proporcional ou Não Proporcional?



☐ Diretamente Proporcional
☒ Inversamente Proporcional
☐ Não Proporcional
☐ Não sei

Diretamente Proporcional, Inversamente Proporcional ou Não Proporcional?



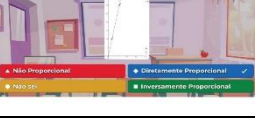
☐ Diretamente Proporcional
☐ Inversamente Proporcional
☒ Não Proporcional
☐ Não sei

Diretamente Proporcional, Inversamente Proporcional ou Não Proporcional?



☐ Diretamente Proporcional
☐ Inversamente Proporcional
☐ Não Proporcional
☒ Não sei

Diretamente Proporcional, Inversamente Proporcional ou Não Proporcional?



☐ Não Proporcional
☒ Diretamente Proporcional
☐ Inversamente Proporcional
☐ Não sei

Diretamente Proporcional, Inversamente Proporcional ou Não Proporcional?



☐ Inversamente Proporcional
☐ Não Proporcional
☒ Diretamente Proporcional
☐ Não sei

Detalhes

Máx. 40 participantes. Faça upgrade para ter mais

Atualizado: há 3 anos · Visibilidade: Privado

Créditos de mídia

Imagem da capa: Eugene Mymrin/Moment/Getty Images

Fonte: autoria própria

Os dados produzidos durante a intervenção foram analisados qualitativamente por meio de uma abordagem interpretativa das produções escritas dos estudantes, dos registros das atividades desenvolvidas e das observações realizadas durante os encontros. A análise buscou identificar indícios de compreensão do conceito de proporcionalidade e possíveis contribuições da sequência didática para a construção desse conceito, considerando especialmente três aspectos apontados por Silvestre e Ponte (2012): (i) a capacidade de distinguir situações proporcionais e não proporcionais; (ii) a compreensão da natureza multiplicativa das relações proporcionais; e (iii) a utilização de diferentes representações para justificar conclusões acerca das relações entre grandezas. As interpretações apresentadas têm caráter exploratório e procuram compreender os processos de construção conceitual observados ao longo da sequência didática.

Resultados

Na Intervenção 1 as situações exploravam a relação entre grandezas e os alunos deveriam identificar que as aferições de eficiência ou contingência estavam condicionadas à interdependência entre as variáveis. Na situação onde deveriam identificar dentre quatro times o mais eficiente conhecendo o número de gols e o número de partidas disputadas por eles, 9 dos 14 alunos responderam corretamente. No problema que envolvia a relação entre as dimensões de um salão e a quantidade de pessoas que este comportava, 2 alunos tiveram problema com o cálculo da área e 3 alunos consideraram apenas o número de pessoas sem levar em consideração as dimensões do salão. No problema que apresentava a relação entre crianças atendidas e crianças inscritas em diferentes centros de vacinação, apenas 2 dos alunos consideraram o mais eficiente como o que atendeu o maior número de crianças, sem considerar a relação de proporcionalidade entre atendidos e total de inscritos. Quanto ao preenchimento das tabelas, de um modo geral todos fizeram corretamente, no entanto tiveram dificuldade para identificar a relação entre as grandezas, especialmente da tabela 2 por conter dados que envolviam números decimais. Foi

necessário um direcionamento da pesquisadora/professora para que pudessem compreender o que era necessário observarem.

Na primeira parte da Intervenção 2 os alunos deveriam preencher as tabelas identificando a relação entre as grandezas. Na primeira situação a única dificuldade apresentada foi quanto à identificação da expressão matemática que relacionaria as grandezas. Na segunda situação a dificuldade encontrada pela maioria foi na interpretação do questionamento “se triplicarmos o dinheiro que temos para comprar a água, o que acontece com o número de garrafas que podem ser adquiridas?”, sendo que quase metade dos alunos respondeu que “será sempre três garrafas (a mais)” quando deveriam constatar que seriam três vezes mais garrafas também (Figura 7). Esse resultado sugere dificuldades na compreensão da natureza multiplicativa das relações proporcionais, aspecto apontado por Silvestre e Ponte (2012) como central para o desenvolvimento do raciocínio proporcional. No terceiro problema, que apresentava uma situação onde não havia relação de proporcionalidade direta, metade da turma não identificou a ausência da relação de proporcionalidade entre os minutos utilizados em ligações telefônicas e o preço a ser pago, afirmando que se dobrassem o consumo ou o valor a ser gasto com a conta a outra grandeza também dobraria. Foi necessário nova intervenção com questionamentos que os fizessem refletir sobre as respostas apresentadas. Tal dificuldade evidencia que a distinção entre situações proporcionais e não proporcionais ainda não estava consolidada nesse momento da intervenção, reforçando a relevância de atividades que promovam a comparação entre exemplos e não exemplos do conceito. Na quarta situação, os equívocos envolveram a relação entre os valores obtidos nas divisões que envolviam o tempo em horas e sua interpretação em horas e minutos após a divisão. O problema propunha a análise de uma situação de proporcionalidade entre o tempo gasto por um ciclista e a sua posição fornecida por marcos ao longo do caminho. Mais da metade dos alunos converteu resultados como, por exemplo, 1.25 horas em 1 hora e 25 minutos (Figura 7).

Figura 7 - Análise das respostas de alguns alunos para situações da segunda atividade

2. A tabela abaixo relaciona o preço (em R\$) pago pelo litro de água:

Litros de Água	1	2	7	9	6	3	8	14	13	9,5
Preço em R\$	2	4	14	18	12	6	16	28	26	19

Complete os dados omitidos nesta tabela.

Com base nos dados observados na tabela, responda:

a) O que acontece com o preço quando dobramos o número de garrafas?

R: Ele dobra.

b) O que acontece com o preço quando triplicamos o número de garrafas?

R: Ele triplica.

c) Se triplicarmos o dinheiro que temos para comprar água, o que acontece com o número de garrafas que podem ser adquiridas?

R: Pode triplicar o valor de qualquer quantidade de litro de água, pois sempre será 3 garrafas.

d) Se reduzirmos à quarta parte o dinheiro que temos para comprar água, o que acontece com a quantidade de garrafas a serem adquiridas?

R: A quantidade será reduzida à quarta parte também.

e) Se multiplicarmos por 10 o dinheiro a ser investido na compra de água, o que acontecerá com a quantidade de garrafas que podem ser adquiridas?

R: A quantidade de garrafas será multiplicada por 10 também.

04. Um ciclista, partindo do marco zero de uma estrada, aciona o cronômetro e parte em direção à sua extremidade oposta. Durante a viagem ele anota o tempo t e a sua posição s fornecida pelos marcos quilométricos nos quais se encontra. Os dados são registrados no quadro a seguir:

$t(h)$	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5
$s(km)$	0	4	8	12	16	20	24	28

a) Se o ciclista mantivesse o tempo todo o mesmo ritmo, quanto tempo depois de sua partida ele passaria pelo marco de 32 km? E pelo marco de 48 km?

32-8=4h
48-8=6h

b) Com o mesmo ritmo, 4h30min após sua partida em que marco quilométrico o ciclista estaria passando? E 6h depois?

32km=4h+4km(0,5)=36km
6x8=48km

c) Quantos quilômetros este ciclista anda em média durante uma hora?

8km

d) Qual seria a posição desse ciclista 2h15min após sua partida? E 3h45min depois?

20km

e) Em qual instante ele estaria passando pelo marco 10km? E pelo marco 50km?

10km-8=1h25min
50km-8=6h25min

2. A tabela abaixo relaciona o preço (em R\$) pago pelo litro de água:

Litros de Água	1	2	7	9	6	3	8	14	13	9,5
Preço em R\$	2	4	14	18	12	6	16	28	26	19

Complete os dados omitidos nesta tabela.

Com base nos dados observados na tabela, responda:

a) O que acontece com o preço quando dobramos o número de garrafas?

R: O preço também dobra.

b) O que acontece com o preço quando triplicamos o número de garrafas?

R: O preço também triplica.

c) Se triplicarmos o dinheiro que temos para comprar água, o que acontece com o número de garrafas que podem ser adquiridas?

R: Conseguiremos comprar 3 unidades.

d) Se reduzirmos à quarta parte o dinheiro que temos para comprar água, o que acontece com a quantidade de garrafas a serem adquiridas?

R: Se dividir o dinheiro na quarta parte a quantidade também irá reduzir.

e) Se multiplicarmos por 10 o dinheiro a ser investido na compra de água, o que acontecerá com a quantidade de garrafas a serem adquiridas?

R: A quantidade de garrafas será multiplicada por 10 também.

04. Um ciclista, partindo do marco zero de uma estrada, aciona o cronômetro e parte em direção à sua extremidade oposta. Durante a viagem ele anota o tempo t e a sua posição s fornecida pelos marcos quilométricos nos quais se encontra. Os dados são registrados no quadro a seguir:

$t(h)$	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5
$s(km)$	0	4	8	12	16	20	24	28

a) Se o ciclista mantivesse o tempo todo o mesmo ritmo, quanto tempo depois de sua partida ele passaria pelo marco de 32 km? E pelo marco de 48 km?

Pelo marco 32 km ele passaria com 4 horas
Pelo 48 ele passaria com 6 horas

b) Com o mesmo ritmo, 4h30min após sua partida em que marco quilométrico o ciclista estaria passando? E 6h depois?

36-4h30.
48-6h.

c) Quantos quilômetros este ciclista anda em média durante uma hora?

8 km.

d) Qual seria a posição desse ciclista 2h15min após sua partida? E 3h45min depois?

2h e 15= 17,2 km
2h e 15=27,6 km

e) Em qual instante ele estaria passando pelo marco 10km? E pelo marco 50km?

1h 25= 10km.
6,25= 50km.

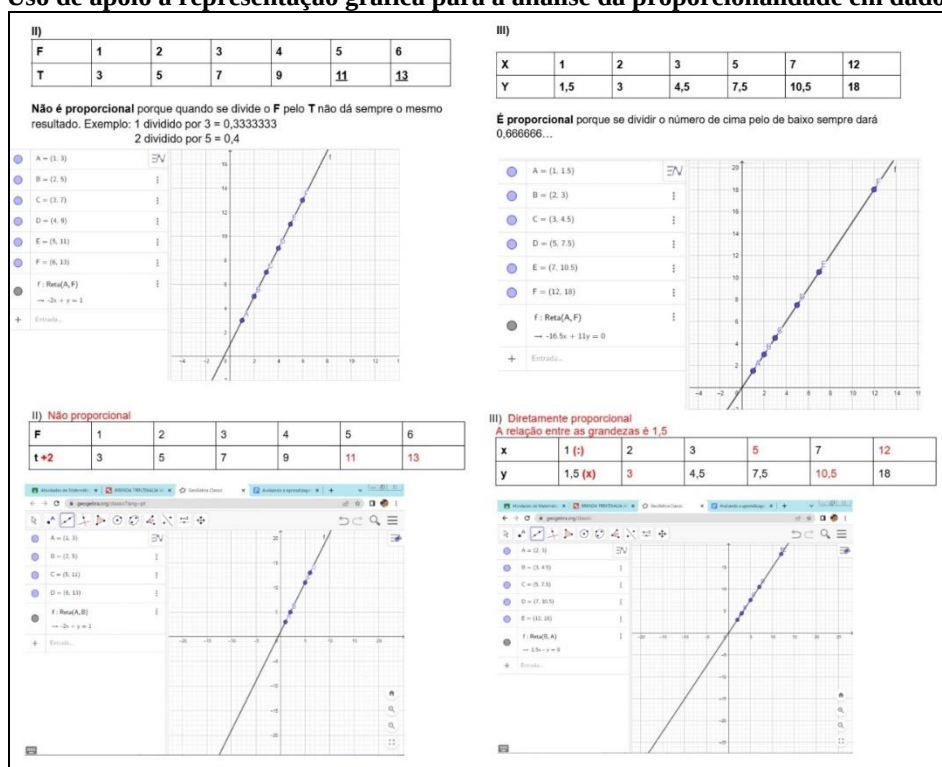
Fonte: autoria própria

Na familiarização com o GeoGebra – próximo passo após o preenchimento das tabelas referentes aos problemas propostos na Intervenção 2 – tudo transcorreu sem
 Revista Devir Educação, Lavras, vol.10, n.1, e-1088, 2026.

intercorrências, uma vez que o uso pressupunha apenas comandos básicos. Os alunos não conheciam o *software* e ficaram muito animados com as possibilidades que vislumbraram nos diversos comandos visíveis na tela. Após as construções deveriam comparar os gráficos obtidos buscando evidenciar se as mesmas semelhanças e diferenças detectadas na construção das tabelas da atividade anterior se mantinham para os gráficos e identificar qual característica visual era marcante nesta diferenciação. Após várias tentativas, muitas discussões e análises comprometidas pela visão equivocada dos alunos frente ao fato de que todas as situações eram representadas graficamente por uma reta, finalmente detectaram que apenas as situações de proporcionalidade apresentavam gráficos que passavam pela origem do sistema cartesiano. A identificação dessa regularidade não ocorreu de forma imediata, mas foi resultado de sucessivas tentativas, comparações e discussões entre os estudantes. Nesse processo, o GeoGebra não atuou apenas como recurso de visualização, mas como instrumento que possibilitou explorar diferentes representações do mesmo fenômeno matemático, favorecendo a análise das relações entre as grandezas.

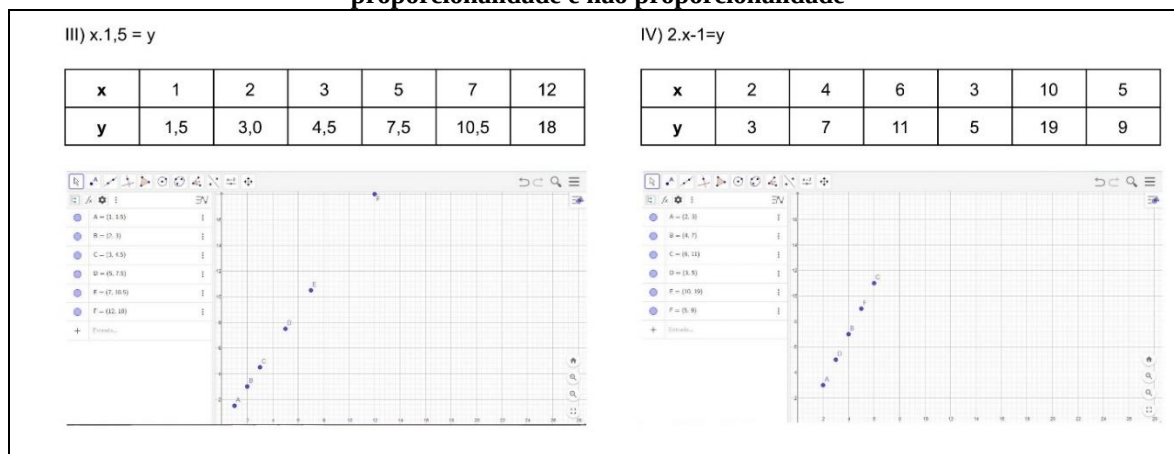
A primeira parte da Intervenção 3, que constituía a atividade final de verificação da aprendizagem, contou com a participação de 10 alunos e foi bastante satisfatória. Dentre as atividades, as situações/problemas de aplicação foram corretamente desenvolvidas por todos. Na atividade onde deveriam preencher as tabelas e concluir se as grandezas eram diretamente proporcionais ou não proporcionais, 9 alunos fizeram uso do gráfico para auxiliar na conclusão (Figura 8), mesmo sem serem orientados para que o fizessem, e 1 dos alunos não expressou a conclusão (se era proporcional ou não), conforme solicitado. Apenas um aluno, conseguiu apresentar corretamente as expressões matemáticas que relacionavam as grandezas – tanto as diretamente proporcionais como as não proporcionais (Figura 9) embora não tenha indicado se tratava-se de caso “diretamente proporcional” ou “não proporcional”.

Figura 8 - Uso de apoio à representação gráfica para a análise da proporcionalidade em dados tabelados.



Fonte: autoria própria

Figura 9 - Representação das expressões matemáticas que relacionavam as grandezas em casos de proporcionalidade e não proporcionalidade



Fonte: autoria própria

Ao finalizar as atividades discursivas, os alunos realizaram uma sequência de procedimentos semelhantes para a abordagem do conceito de proporcionalidade inversa e, concluída essa etapa, participaram de um teste de múltipla escolha (Quiz) no *Kahoot* para a identificação de situações de proporcionalidade e não proporcionalidade apresentadas a partir

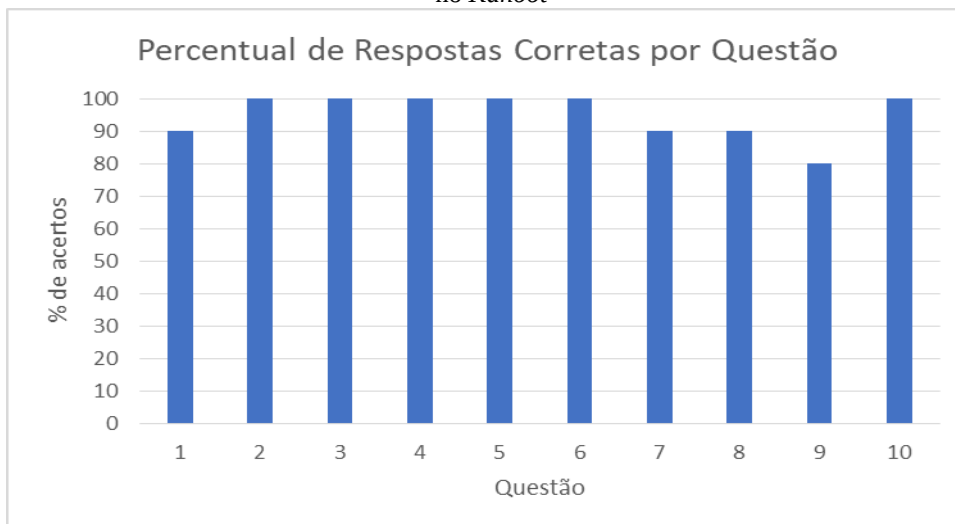
de gráficos e tabelas. Esta atividade final contou com a participação de 10 alunos e todos os participantes tiveram desempenho satisfatório (Gráfico 1). Observou-se maior incidência de erros nas questões que envolviam a análise exclusiva de tabelas (07, 08, 09 e 10). Em conjunto com os registros produzidos pelos estudantes durante as atividades, esse resultado sugere que as representações gráficas podem ter funcionado como um recurso de apoio na distinção entre situações proporcionais e não proporcionais. (Gráfico 2).

Gráfico 1 - Percentual de respostas corretas dos alunos no teste de múltipla escolha (QUIZ) realizado no Kahoot



Fonte: autoria própria

Gráfico 2- Percentual de respostas corretas por questão no teste de múltipla escolha (QUIZ) realizado no Kahoot



Fonte: autoria própria

Análise: aprendizagem do conceito e o papel da tecnologia

A noção de proporcionalidade direta é um tema central da matemática nos anos finais do ensino fundamental e é indispensável em diversas aplicações e diferentes contextos. A abordagem proposta procurou partir da investigação do que os estudantes já haviam se apropriado ao longo da educação básica buscando identificar seus conhecimentos prévios, ampliar suas ideias relacionadas ao conceito a partir da exploração da estrutura multiplicativa, apoiando-se na concepção de que a formação dos conceitos ocorre ao longo do processo, avançando de situações intuitivas para situações mais generalizadas e sistematizadas. Ao enfatizar os aspectos definidores do conceito de proporcionalidade, buscou-se problematizar abordagens centradas predominantemente em procedimentos algorítmicos, frequentemente presentes na cultura escolar, favorecendo a exploração dos significados envolvidos nas relações proporcionais.

A segunda atividade permitiu identificar as estratégias mobilizadas pelos estudantes na resolução das situações propostas, evidenciando o predomínio de raciocínios aditivos em contextos que exigiam relações multiplicativas. Além disso, possibilitou retomar a discussão dos aspectos definidores do conceito e analisar sua presença em diferentes exemplos e não exemplos de proporcionalidade direta.

No contexto das atividades desenvolvidas com a mediação do uso da tecnologia, os alunos deveriam representar os pontos das tabelas inserindo as informações no GeoGebra (descrição) que, a partir dos comandos inseridos, exibia o resultado na tela (execução). A partir dos resultados apresentados, os alunos deveriam analisar as características comparando as representações obtidas em cada caso (reflexão). A análise das representações produzidas possibilitou a comparação entre diferentes situações e favoreceu momentos de reflexão acerca das relações entre as grandezas. Nesse processo, os estudantes foram incentivados a revisar interpretações iniciais, elaborar hipóteses e confrontar diferentes possibilidades de explicação para os fenômenos observados. Embora o uso deste software tenha auxiliado o aprendiz a adquirir as informações para refletir sobre o conceito, ele não permitiu o registro do processo de pensamento que estava sendo despendido na construção do conhecimento, ou seja, o aluno não estava descrevendo o que pensava, mas refletindo a partir das possibilidades oferecidas

pelo software. Por este motivo, esta etapa foi mediada pela pesquisadora, propondo discussões e elaboração de hipóteses, criando as condições necessárias para complementar o processo de construção do conceito. O que chamou atenção, foi o fato de que, embora tenham se apoiado na elaboração do gráfico como complementar para a tomada de decisão na atividade de avaliação, justificaram a proporcionalidade ou não através da relação entre as grandezas. Contraditoriamente, nos testes de múltipla escolha, as poucas dificuldades foram registradas prioritariamente nas questões que envolviam a análise da relação de proporcionalidade em dados dispostos em tabelas, o que sugere que as representações gráficas produzidas com apoio do software constituíram um recurso relevante para a diferenciação entre situações proporcionais e não proporcionais.

Analisando os equívocos cometidos por alguns alunos na Intervenção 1, convalidados no momento de socialização e discussão das atividades, pode-se perceber que à princípio eles foram influenciados pelo contexto, não conseguindo distinguir corretamente que a eficiência ou a contingência dependiam da relação entre as grandezas envolvidas. Esse tipo de dificuldade é frequentemente apontado na literatura como um dos fatores que contribuem para a complexidade dos problemas de proporcionalidade.

No preenchimento das tabelas da Intervenção 1 não conseguiram perceber a natureza multiplicativa das relações proporcionais. Por este motivo tiveram dificuldade para compreender como poderiam inserir as informações de tal forma que a relação entre as grandezas fosse sempre a mesma. A relação entre as grandezas era multiplicativa e eles buscavam relações aditivas. Adicionalmente, queixaram-se da dificuldade com a tabela que apresentava valores decimais, relatando dificuldades na interpretação e manipulação de números racionais, seja em sua representação decimal ou fracionária. Tais dificuldades são frequentemente apontadas na literatura como fatores que podem aumentar a complexidade de problemas envolvendo proporcionalidade, especialmente em situações que mobilizam grandezas contínuas e diferentes representações numéricas.

As dificuldades encontradas na identificação das expressões matemáticas durante a Intervenção 2 confirmam a afirmação de Teixeira (2004) no que diz respeito ao fato de que a aprendizagem dos conceitos matemáticos é um processo complexo porque, além da estruturação hierárquica dos conceitos, exige uma interpretação que depende de simbolização

própria. Alguns também se equivocaram quanto a natureza multiplicativa do raciocínio proporcional, e, embora tenham preenchido corretamente a tabela de dados referente à situação de não proporcionalidade, afirmaram que “ao dobrar o valor de uma variável a outra dobraria também”, não identificando que o comportamento multiplicativo não se mantinha. Novamente apresentaram dificuldades em contexto que envolvia o conjunto dos números racionais, na interpretação da conversão da representação decimal para a fracionária (horas-minutos) e sua visualização diante do todo (relógio). Equívocos na interpretação da parte decimal de um número como se fosse o denominador de sua representação fracionária são também frequentes até mesmo entre alunos do ensino superior.

Após todas as discussões proporcionadas durante a socialização de cada etapa das intervenções 1 e 2, os registros produzidos na Intervenção 3 sugerem uma mudança de ênfase das propriedades características do conceito de proporcionalidade para aspectos mais diretamente relacionados à compreensão da invariância e da covariação. Além disso, a utilização de diferentes representações para justificar conclusões acerca das relações entre as grandezas constitui um indício de ampliação das formas de argumentação mobilizadas pelos estudantes, aspecto considerado relevante no desenvolvimento do raciocínio proporcional (Silvestre; Ponte, 2012). Os resultados também sugerem a influência de concepções frequentemente associadas às experiências escolares anteriores dos estudantes, nas quais a proporcionalidade tende a ser abordada predominantemente por meio da igualdade entre razões e da aplicação algorítmica da regra de três.

Os resultados observados não permitem atribuir à tecnologia, isoladamente, a construção dos conceitos pelos estudantes. Entretanto, sugerem que a combinação entre tarefas investigativas, discussões coletivas e o uso de representações gráficas produzidas com auxílio do GeoGebra constituiu um contexto favorável à exploração de aspectos centrais do raciocínio proporcional. Nesse processo, o software atuou como suporte para a visualização e comparação das relações entre as grandezas, enquanto a mediação docente desempenhou papel relevante na problematização das situações e na elaboração de significados pelos participantes.

Considerações finais

O conceito de proporcionalidade direta foi explorado tomando-se por base as relações multiplicativas, buscando envolver os alunos em atividades não rotineiras capazes de mobilizar conhecimentos intuitivos e favorecer a reflexão sobre os aspectos definidores do conceito. Nesse processo, procurou-se enfatizar as ideias de covariação — quando as grandezas variam conjuntamente — e de invariância — caracterizada pela constância da razão entre elas.

Os resultados obtidos ao longo da intervenção sugerem que as atividades centradas na exploração da natureza multiplicativa das relações proporcionais favoreceram a mobilização de conhecimentos prévios e a construção de novas interpretações acerca do conceito de proporcionalidade pelos estudantes. Além disso, o uso do GeoGebra como recurso de representação gráfica mostrou-se relevante para a comparação entre exemplos e não exemplos de grandezas diretamente proporcionais, apoiando os estudantes na formulação e no teste de conjecturas. Esses indícios reforçam a importância de abordagens que ultrapassem a aplicação mecânica da regra de três e promovam a reflexão sobre relações e representações matemáticas.

Os resultados devem ser interpretados à luz das limitações do estudo, especialmente o número reduzido de participantes e o caráter localizado da intervenção realizada em uma única turma de Pedagogia. Assim, as conclusões não possuem pretensão de generalização, mas apontam possibilidades pedagógicas para o ensino da proporcionalidade na formação inicial de professores. Nesse sentido, a sequência didática analisada contribui ao evidenciar que a mediação docente articulada ao uso de representações gráficas e discussões coletivas pode favorecer a compreensão de aspectos centrais do raciocínio proporcional, especialmente aqueles relacionados à distinção entre situações proporcionais e não proporcionais e à compreensão das ideias de covariação e invariância.

Referências

Barros, Ana Paula Rodrigues Magalhães de; Stivam Elen Priscila. O software GeoGebra na concepção de micromundo. **Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo**, [S. l.],
Revista Devir Educação, Lavras, vol.10, n.1, e-1088, 2026.

v. 1, n. 1, p. 184–194, 2012. Disponível em:
<https://revistas.pucsp.br/index.php/IGISP/article/view/8388>. Acesso em: 10 jan. 2024.

Coll, César; Monereo, Carles. **Psicologia educação virtual: aprender e ensinar com as Tecnologias da Informação e da Comunicação**. Tradução: Naila Freitas. Porto Alegre: Artmed, 2010. p. 15 – 46.

Klausmeier, Herbert John; Goodwin, William. **Manual de psicologia educacional: aprendizagem e capacidades humanas**. Tradução: Maria Célia Teixeira Azevedo de Abreu. São Paulo: Harper & Row do Brasil, 1977, p. 310 – 345.

Lomônaco, José Fernando Bitencourt et al. Desenvolvimento de conceitos: o paradigma das transformações. **Psicologia: Teoria e Pesquisa**, [S. l.], v. 17, n. 2, p. 161–168, ago. 2001. Disponível em: <https://doi.org/10.1590/S0102-37722001000200008>. Acesso em: 17 jan. 2024.

Lomônaco, José Fernando Bitencourt. Do característico ao definidor: um estudo exploratório sobre o desenvolvimento de conceitos. **Psicologia: Teoria e Pesquisa**, [S. l.], v. 12, n. 1, p. 051–060, 2013. Disponível em: <https://periodicos.unb.br/index.php/revistapt/article/view/17265>. Acesso em: 17 jan. 2024.

Menduni-Bortoloti, Roberta D’Angela; Barbosa, Jonei Cerqueira. A construção de uma matemática para o ensino do conceito de proporcionalidade direta a partir de uma revisão sistemática de literatura. **Bolema: Boletim de Educação Matemática**, Rio Claro, v. 31, n. 59, p. 947–967, dez. 2017. Disponível em: <https://doi.org/10.1590/1980-4415v31n59a05>. Acesso em: 10 jul. 2024.

Miguel, José Carlos. Formação do conceito de proporcionalidade na perspectiva do ensino desenvolvimental. **Práxis Educacional**, Vitória da Conquista, v. 16, n. 41, p. 502–524, 2020. Disponível em: <http://periodicos2.uesb.br/praxis/article/view/6491>. Acesso em: 05 jul. 2024.

Moraes, Dirce Aparecida Foletto de. **Os processos formativos de estudantes universitários paranaenses e suas relações com os artefatos digitais**: uma proposta de mediação didática colaborativa baseada na cognição distribuída. 2017. 340 f. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade Estadual Paulista (Unesp), Presidente Prudente (SP), 2017.

Nébias, Cleide. Formação dos conceitos científicos e práticas pedagógicas. **Interface - Comunicação, Saúde, Educação**, [s.l.], n. 4, p. 133–140, fev. 1999. Disponível em: <https://doi.org/10.1590/S1414-32831999000100011>. Acesso em 10 jan. 2024.

Oliveira, Marta Kohl de. Três questões sobre desenvolvimento conceitual. In: Oliveira, Marta Kohl de; Oliveira, Marcos Barbosa (org.). **Investigações Cognitivas - Conceitos, Linguagem e Cultura**. Porto Alegre: Artmed, 1999. p. 55 - 64.

Piaget, Jean. **Biologia e conhecimento**: ensaio sobre as relações orgânicas e os processos cognitivos. Petrópolis: Vozes, 1973.

Ponte, João Pedro da et al. **O desenvolvimento do conceito de proporcionalidade directa pela exploração de regularidades**. Lisboa: Instituto de Educação da Universidade de Lisboa - Universidade da Beira Interior, 2010.

Ruiz, Adriano Rodrigues; Carvalho, Anna Maria Pessoa de. **O conceito de proporcionalidade**. Revista Faculdade de Educação, USP, dez. 1990. Disponível em: <https://www.revistas.usp.br/rfe/article/view/33454>. Acesso em: 7 jul. 2024

Santaella, Lucia. A aprendizagem ubíqua na educação aberta. **Revista Tempos e Espaços em Educação**, São Cristóvão, v. 7, n. 14, p. 15–22, 2014. Disponível em: <https://periodicos.ufs.br/revtee/article/view/3446> . Acesso em: 7 jul. 2024.

Shulman, Lee S. **Those who understand**: knowledge growth in teaching. **Educational Research**, [s.l.], v. 15, n. 2, p. 4–14, 1986. Disponível em: <https://www.wcu.edu/webfiles/pdfs/shulman.pdf>. Acesso em: 02 dez. 2024.

Silvestre, Ana Isabel; Ponte, João Pedro da. Proporcionalidade directa no 6.º ano de escolaridade: uma abordagem exploratória. **Revista Interacções**, [S. l.], v. 8, n. 20, p. 70–97, 2012. Disponível em: <https://revistas.rcaap.pt/interaccoes/article/view/486>. Acesso em: 7 jul. 2024.

Teixeira, Leny Rodrigues Martins. **Dificuldades e erros na aprendizagem da matemática**. In: VII EPEM Encontro Paulista de Educação Matemática, 2004, São Paulo. Anais [CD-ROM]. São Paulo: SBEM, 2004.

Valente, José Armando A análise de diferentes tipos de softwares usados na educação. In: Valente, J. A. **O computador na sociedade do conhecimento**. Campinas: Gráfica Central da UNICAMP, 1999. p. 89 –99.

Valente, José Armando. **A espiral da espiral de aprendizagem**: o processo de compreensão do papel das tecnologias de informação e comunicação na educação. 2005. Tese (Livre Docência) — Universidade de Campinas (UNICAMP), Campinas (SP), 2005.

Valente, José Armando. Integração do pensamento computacional no currículo da educação básica: diferentes estratégias usadas e questões de formação de professores e avaliação do aluno. **Revista e-Curriculum**, São Paulo, v. 14, n. 03, p. 864–897, 2016. Disponível em: <https://revistas.pucsp.br/index.php/curriculum/article/view/29051/20655>>. Acesso em: 10 jan. 2024.

Recebido: julho/2025

Correções requeridas: maio/2026

Aprovado: junho/2026